Proceedings of IAM, V.2, N.1, 2013, pp.3-10

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ГАЗЛИФТНОМ ПРОЦЕССЕ*

Фикрет А. Алиев[1], Н.А. Исмаилов[1]

[1]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербаиджан
e-mail: f_aliev@yahoo.com

Резюме. Формулируется математическая задача определения коэффициента гидравлического сопротивления при движении газожидкостной смеси (ГЖС) в подъемнике. Задача сводится к минимизации нелинейного функционала составленного на основе статистических данных (истории) скважины. На основе методов наискорейшего спуска (градиентный) и ортогонализации Грамм-Шмидта находится коэффициент гидравлического сопротивления λ_c. Результаты иллюстрируются примером из практики, который определяет коэффициент λ_c с точностью до 10^{-3} порядка.

Ключевые слова:. гидравлическое сопротивление, газожидкостная смесь, ортогонализация Грамм-Шмидта.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

Движение объекта, описывающееся системой нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, которое после усреднения по времени [1]приводится к следующей системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{Q} = \frac{2a\rho F Q^2}{c^2\rho^2 F^2 - Q^2}, \quad Q(0) = Q_0, \tag{1}$$

где $2a = \dfrac{g}{\omega_e} + \dfrac{\lambda_c \omega_e}{2D}$, g - ускорение свободного падения, λ_c - гидравлическое сопротивление, D- внутренние эффективные диаметры подъемника и кольцевого пространства, ω_e - скорость движения газа и ГЖС, которую можно принять постоянной и равной своему (на отрезке трубы высотой $dx = \omega_e dt$) среднему значению и независящему от времени, $Q = \rho\omega_e F$ - массовый расход закачиваемого газа в кольцевом пространстве и ГЖС в подъемнике, F – площадь поперечного сечения насосно-компрессорных труб в кольцевом пространстве и подъемнике.

---

* Reported at the seminar of the Institute of Applied Mathematics in 23.04.2013

В уравнение (1) входит коэффициент λ_c (гидравлическое сопротивление), который влияет на правильность расчета Q в кольцевом пространстве и подъемнике.

При эксплуатации газлифтных скважин (при транспортировке жидкостей, газов, воздуха и паров в трубопроводах) для расчета движения газа в кольцевом пространстве и ГЖС в насосно-компрессорных трубах необходимы точные гидравлические расчеты [2] (т.е. определение коэффициента гидравлического сопротивления).

Принимая за исходные данные $a, \rho, F, c, \omega_e, \lambda_e, D$ решается обыкновенное дифференциальное уравнение для определения перераспределения расхода газа по глубине газлифтной скважины в кольцевом пространстве, а также ГЖС в подъемнике (насосно-компрессорных трубах).

Уравнение (1) допускает разделение переменных

$$\frac{c^2\rho^2F^2 - Q^2}{2a\rho FQ^2}dQ = dx,$$

или

$$\frac{c^2\rho^2F^2}{2a\rho F}\cdot Q^{-2}dx - \frac{1}{2a\rho F}dQ = dx\,.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем общий интеграл в следующем виде

$$-\frac{c^2\rho^2F^2}{2a\rho F}\cdot\frac{1}{Q} - \frac{1}{2a\rho F}Q = x + c_1\,.$$

Учитывая $Q(0) = Q_0$, находим,

$$c_1 = -\frac{c^2\rho^2F^2}{2a\rho F}\cdot\frac{1}{Q_0} - \frac{1}{2a\rho F}Q_0\,.$$

Подставляя найденное значение c_1 в общий интеграл уравнения (1), удовлетворяющий начальному условию $Q(0) = Q_0$, частное решение уравнения (1) в неявном виде выглядит так

$$Q^2 + (2a\rho Fx - c^2\rho^2F^2\cdot\frac{1}{Q_0} - Q_0)Q + c^2\rho^2F^2 = 0\,. \qquad (2)$$

Решая уравнение (2) относительно Q, имеем

$$Q = -a\rho Fx - c_2 \pm\sqrt{(a\rho Fx + c_2)^2 - c^2\rho^2F^2},$$

где

$$2c_2 = -c^2\rho^2F^2/Q_0 - Q_0\,.$$

Явное решение исходной задачи Коши (1) будет в виде

$$Q(x) = -\left(a\rho Fx + \frac{c^2\rho^2F^2 + Q_0^2}{2Q_0} \right) - \sqrt{(a\rho Fx - \frac{c^2\rho^2F^2 + Q_0^2}{2Q_0})^2 - c^2\rho^2F^2} \qquad (3)$$

Предположим, что значение решения (выходные данные) исходной задачи принимаются за входные данные, а одно из входных данных исходной задачи (и в нашем случае коэффициент гидравлического сопротивления λ_c) принимается за неизвестное (т.е. предлагается обратная задача) и дается метод решения (затем и алгоритм).

2. Постановка задачи

При постановке задачи за исходные данные задачи принимаются статистические данные (истории скважины) газлифтных скважин. Таким образом, опираясь на данные из истории скважины и решая обратную задачу, находим исходные данные (т.е. λ_c), которые входят в уравнение (1).

Итак, предположим, что из истории газлифтной скважины имеются статистические данные $Q_i^{st}, i = \overline{1,n}$. Q_i^{st} - объем ГЖС на выходе газлифтной скважины, n - число измерений на выходе той же скважины.

Таким образом, отыскание коэффициентов гидравлического сопротивления λ_c сводится к отысканию минимума целевой квадратичной функции

$$f(\lambda_c) = \sum_{i=1}^{n} (Q_i^{st} - Q_i(2l))^2 \to \min, \qquad (4)$$

здесь $Q(2l)$ определяется из (3). Учитывая (3) в (4), функционал $f(\lambda_c)$ принимает вид

$$f(\lambda_c) = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[Q_i^{st} - \frac{c^2\rho^2F^2 + Q_0^2}{2Q_0} + (\frac{g}{2\omega_c} + \frac{\lambda_c}{4D}\omega_c)\rho F 2l + \\ + \sqrt{\left((\frac{g}{2\omega_c} + \frac{\lambda_c}{4D}\omega_c)\rho F 2l - \frac{c^2\rho^2F^2 + Q_0^2}{2Q_0} \right)^2 - c^2\rho^2F^2} \Bigg]^2 \to \min \qquad (5)$$

Таким образом, для градиента целевой функции имеем

$$\frac{\partial f(\lambda_c)}{\partial \lambda_c} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\omega_c}{4D}\rho F 2l + \frac{\left((\frac{g}{2\omega_c} + \frac{\lambda_c}{4D}\omega_c)\rho F 2l - \frac{c^2\rho^2F^2 + Q_0^2}{2Q_0} \right)\frac{\omega_c}{4D}\rho F 2l}{\sqrt{\left((\frac{g}{2\omega_c} + \frac{\lambda_c}{4D}\omega_c)\rho F 2l - \frac{c^2\rho^2F^2 + Q_0^2}{2Q_0} \right)^2 - c^2\rho^2F^2}} \right] \Bigg[Q_i^{st} - \frac{c^2\rho^2F^2 + Q_0^2}{2Q_0} + \\ + (\frac{g}{2\omega_c} + \frac{\lambda_c}{4D}\omega_c)\rho F 2l + \sqrt{\left((\frac{g}{2\omega_c} + \frac{\lambda_c}{4D}\omega_c)\rho F 2l - \frac{c^2\rho^2F^2 + Q_0^2}{2Q_0} \right)^2 - c^2\rho^2F^2} \Bigg]\Bigg] . \qquad (6)$$

Поставленная задача нахождения минимума $f(\lambda_c)$ из (4) является задачей нелинейного программирования без ограничений, которая сводится к следующей: минимизировать $f(\lambda_c)$, где $f(\lambda_c)$ является целевой функцией. Здесь рассматривается вопрос о том, как решить задачу (5) с помощью алгоритмов, использующих первую производную $f(\lambda_c)$. Сначала описывается поиск наискорейшего спуска, опирающийся на сопряженный направленный [3-5] (путем использования одномерного поиска золотого сечения).

3. Вычислительный алгоритм

Кратко изложим стратегию метода оптимизации без ограничений; т.е. в вычислительном аспекте здесь используются только первые производные (6). Переход из точки $\lambda_c^{(k)}$ в точку $\lambda_c^{(k+1)}$ описывается следующей формулой:

$$\lambda_c^{(k+1)} = \lambda_c^{(k)} - \Delta\lambda_c^{(k)} = \lambda_c^{(k)} - \gamma^{(k)}\eta^{(k)}\nabla f(\lambda_c^{(k)}) = \lambda_c^{(k)} -^{(k)} \eta^{*(k)}\nabla f(\lambda_c^{(k)}), \qquad (7)$$

где $\Delta\lambda_c^{(k)}$ - вектор перехода из точки $\lambda_c^{(k)}$ в точку $\lambda_c^{(k+1)}$, $\eta^{(k)}$ - единичный вектор в направлении $\Delta\lambda_c^{(k)}$, который определяется из следующих рекуррентных соотношений [3]:

$$\eta^{(k+1)} = \eta^{(k)} + V^{(k)} - W^{(k)};$$

$$V^{(k)} = \frac{\Delta\lambda_c^{(k)}(\Delta\lambda_c^{(k)})^T}{(\Delta\lambda_c^{(k)})^T \Delta g(\lambda_c^{(k)})};$$

$$W^{(k)} = \frac{\eta^{(k)}\Delta g(\lambda_c^k)(\Delta g(\lambda_c^k))^T(\eta^{(k)})^T}{(\Delta g(x^{(k)}))^T \eta^{(k)}\Delta g(\lambda_c^k)};$$

$$\Delta\lambda_c^{(k)} = \lambda_c^{(k+1)} - \lambda_c^{(k)},$$

$$\Delta g(\lambda_c^{(k)}) = \frac{\partial f(\lambda_c^{(k+1)})}{\partial\lambda_c^{(k+1)}} - \frac{\partial f(\lambda_c^{(k)})}{\partial\lambda_c^{(k)}}$$

t- знак транспонирования.

Исходная $\eta^{(0)}$ выбирается в виде единичной матрицы или же любого вектора в направлении $\Delta\lambda_c$.

$\gamma^{(k)}$, $\gamma^{*(k)}$ - скаляры, определяемые методом одномерного поиска (золотого сечения).

Решение задачи (4) начинается с выбора начальной точки $\lambda_c^{(0)}$ (она является произвольной), затем выполняется итерационный процесс (7). Если выполняется условие $\left\| \frac{\partial f(\lambda_c^{(k)})}{\partial\lambda_c^{(k)}} \right\| \le \varepsilon$ (ε - достаточно малое положительное число), $\lambda_c^{(k)}$ принимается за минимальную точку, т.е. $\lambda_c^{(k)} = \lambda_c^{*(k)}$ и $f(\lambda_c^{*(k)})$ есть минимум функции (6).

Успех в достижении оптимального решения в пределах заданной точности зависит, в основном, от точности вычисления градиента целевой функции (5). Вообще говоря, успех работы алгоритма основывается на опыте экспериментальных неудач и имеет мало общего с фундаментальным понятием (лежащем в основе алгоритма), но тем не менее, алгоритм оказывается работоспособным [3] . Даже изменение начального шага в одномерном поиске оказывает серьезное влияние на траекторию поиска при минимизации целевой функции (5).

При решении задачи нелинейного программирования выше выбранный алгоритм может оказаться эффективным, даже если не удастся доказать его сходимость. Справедливо и обратное, т.е. наличие доказательства сходимости алгоритма в частных случаях может не означать, что он окажется удовлетворительным для более сложных задач [3,6].

Алгоритм, опирающийся на метод строго наискорейшего спуска, может встретиться в стационарной точке (в которой составляющие градиента $f(\lambda_c)$ равны нулю). Здесь необходимо определить, является ли данная точка точкой локального минимума (т.е. решением) или седловой точкой? Если это седловая точка, то следует применить какой-либо неградиентный метод, чтобы выйти из нее, после чего минимизация может продолжаться, как и ранее. Тип стационарной точки может быть проверен путем исследования матрицы Гессе

$$\Delta^2 f(\lambda_c{}^{(k)}) = H((\lambda_c{}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\lambda_c^{(k)})}{\partial \lambda_{c1}^1} \cdots \dfrac{\partial^2 f(\lambda_c^{(k)})}{\partial \lambda_{c1} \partial \lambda_{cn}} \\ ------------- \\ \dfrac{\partial^2 f(\lambda_c^{(k)})}{\partial \lambda_{cn} \partial \lambda_{c1}} \cdots \dfrac{\partial^2 f(\lambda_c^{(k)})}{\partial \lambda_{cn}^2} \end{bmatrix}$$

целевой функции $f(\lambda_c)$. Если эта матрица, взятая в данной стационарной точке, не является положительно определенной, то стационарная точка - седловая.

Поэтому в качестве неградиентного метода предлагается алгоритм, опирающийся на ортогонализацию градиентных направлений на основе процедуры Грамма-Шмидта.

Шаг 1. Используя процедуру ортогонализации Грамма-Шмидта вычисляются векторы ω_i^j, $i = j$, $j+1,...,n$, $j = 2,3,...,n^2$, так, чтобы множество векторов

$$\left(\frac{\partial f(\lambda_c^1)}{\partial \lambda_c^1}, \frac{\partial f(\lambda_c^2)}{\partial \lambda_c^2}, ..., \frac{\partial f(\lambda_c^i)}{\partial \lambda_c^i}, \omega_i^j, \omega_{i+1}^j, ..., \omega_n^j \right)$$

в R^n образовали ортогональный базис.

Алгоритм ортогонализации, при котором по линейно независимой системе $a_1, a_2, ..., a_k$ строится ортогональная система $b_1, b_2, ..., b_k$ такая, что каждый вектор b_i линейно выражается через $a_1, a_2, ..., a_i$, то есть матрица перехода $\{a_i\}$ к $\{b_i\}$- верхняя треугольная матрица. При этом можно добиться того, чтобы система $\{b_i\}$ была ортонормированной, где диагональные элементы матрицы перехода были положительными; этими условиями система $\{b_i\}$ и матрица перехода определяются однозначно.

Алгоритм полагает $b_1 = a_1$, и, если уже построены векторы $b_1, b_2, ..., b_{i-1}$, то

$$b_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{< a_i, b_j >}{< b_i, b_j >} b_j .$$

где- $< >$ знаки скалярного произведения векторов.

Шаг 2. Для ортогонализации градиентных направлений вычисляем ν_i^j в виде

$$\nu_i^j = \frac{f(\lambda_c + \delta\omega_i^j) - f(\lambda_c - \delta\omega_i^j)}{2\delta}, \quad i = j, \quad j+1, ..., n$$

где $\delta > 0$ - некоторый малый параметр.

Шаг 3. Ортогональные градиентные направления выбираются в виде

$$l_j = \sum_{i=j}^{n} \nu_i^j \omega_i^j .$$

Заменяя в (7) $\Delta f(\lambda_c^{(k)})$ на l_j неградиентная итерационная процедура минимизации примет вид:

$$\lambda_c^{(k+1)} = \lambda_c^{(k)} - æ^{*(k)} l_k$$

где $æ^{*(k)}$ - скаляр, который определяется методом золотого сечения в одномерном поиске при нахождении функции (5).

Проиллюстрируем применение вышеизложенного метода на примере следующей задачи: на основе заранее известных Q_i^{st} (соответствующего статистическим данным из конкретной газлифтной скважины) строится квадратичный функционал (4), который требуется минимизировать [7-9].

В соответствии с изложенным выше алгоритмом получен $\lambda_c^* = 0,2312$ путем минимизации $f(\lambda_c)$ по λ_c. Здесь $\partial f(\lambda_c^*)/\partial \lambda_c \approx 3,23 \cdot 10^{-8}$. Значение функции $f(\lambda_c^*) \approx 5{,}17 \cdot 10^{-2}$. При этом в построенной тестовой задаче было известно, что $\lambda_c = 0{,}23$ т.е., совпадение до четырех значимых цифр при восьми итерациях. Если увеличить число итераций, например до 40 итераций, то λ_c совпадает с λ_c^* до восьми значимых цифр, т.е. $\lambda_c^* \approx 0{,}230001$. Эта точность, полученная путем предложенной процедуры вычисления коэффициента гидравлического сопротивления (одна из характеристик изучаемого процесса) позволяет утверждать, что модель адекватна, т.е. дает практически приемлемые прогнозы.

Литература

1. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса, Прикладная Механика, т. 46, № 6, 2010, с.113-123.
2. Альтшуль Д.М. Гидравлические сопротивления, Москва, 1970, Недра с. 216
3. Himmebblau D.M. Applied Nonlinear Programming, New York: Craw-Hill Book Company, 1972, p.536.
4. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Об одной задаче идентификации в линейном стационарном случае. Доклады НАН, №6, 2010, с. 6-14
5. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Об одном методе линеаризации для нелинейных систем. Мехатроника, Автоматизация, Управления, Москва, 2012, №6, (135), с.2-6.
6. Fletcher R., Leyffer S.L. Nonlinear Programming without a penalty function, Dundee Numerical Analysis Report, NA/171, 1996, p.32.
7. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М., Исмаилов Н.А., Раджабов М.Ф. Алгоритм построения оптимальных регуляторов при газлифтой эксплуатации, Автоматика и Телемеханика. №8, 2012, с. 3-15.
8. Apostolyuk A.S., Larin V. B. On linear stationary system at regular and irregular measurements. Appl. Comp. Math. Vol.8, № 1, 2009. pp. 42-53.
9. Apostolyuk A.S., Larin V. B. Updating of linear stationary dynamic system parameters, Appl. Comp. Math., Vol.10, № 3, 2011, pp. 402-408.

Qazlift prosesində hidravlik müqavimətin əmsallarının hesablanma alqoritmi

F.Ə. Əliyev, N.A İsmayılov

XÜLASƏ

Qaldırıcı maye-qaz qatışığının hərəkəti zamanı hidravlik müqavimətin əmsallarının təyini üçün riyazi məsələ qoyulub. Quyunun statistik məlumatları əsasında məsələ qeyri xətti funksionalın minimallaşdırılması məsələsinə gətirilir.

Hidravlik müqavimətlərin əmsalları qradient metodu və Qram-Şmidin ortoqonallaşdırma metodu vasitəsi ilə tapılır. Nəticələr praktikadan gələn misallarla yoxlanılır və 10^{-3} dəqiqliklə hesablanır.

Açar sözlər: hidravlik müqavimət, maye-qaz qatışığı, Qram-Şmidin ortoqonallaşdırması.

Algorithm of calculating of hydraulic resistance's coefficient in gas-lift process

F.A. Aliev, N.A. İsmailov

ABSTRACT

The mathematical problem of determining of the hydraulic resistance's coefficient during moving of the gas-liquid mixture (GLM) in lifts is formulated. The task is to minimize the non-linear functional based on statistic data (history) of the well. Based on the methods of steepest descent (gradient) and Gramm-Schmidt's orthogonalization the coefficient of hydraulic resistance λ_c is found. The results are illustrated by an example from practice that defines coefficient λ_c up to the order of 10^{-3}.

Keywords: hydraulic resistance's, gas-liquid mixture, Gramm-Schmidt's orthogonalization.